博客园 cnblogs.com 首页 新闻 博问 专区 闪存 班级 代码改变世界 注册 登录

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

<			2022年3月			>
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”

昵称： 我是8位的
园龄： 4年7个月
粉丝： 288
关注： 5
+加关注

搜索

找找看
谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

多变量微积分笔记14——保守场和独立路径

场论理论包括多种形式，比如简单的向量场，而梯度场则是由数量场所得到的矢量场，它的定义与坐标系的选择无关。梯度场在微分学、积分学以及算子的定义方面起着重要的作用。梯度场在物理学中也称为保守场，这来源于能量守恒定律。

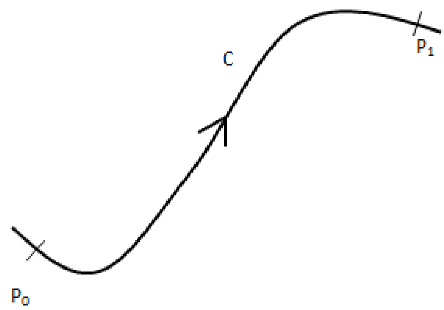
梯度场与势函数

f(x, y)是关于x和y的函数，如果存在向量场**F** = ▿f，也就是向量场**F**是f的梯度，那么称**F**是梯度场，f是梯度场**F**的势函数。

线积分的基本定理

单变量微积分的基本定理告诉我们，对原函数的导数积分会得到原函数。相应地，线积分的基本定理是这样描述的：如果对一个函数的梯度做线积分，就能得到原函数。

线积分的基本定理告诉我们，如果沿一条曲线对一个函数f的梯度做积分，即对一个梯度场做积分，计算结果将会是f在P_1点的值减去f在P_0点的值：



$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f\cdot d\vec{r} = f(P_1) - f(P_0)$$

需要注意的是，上式仅在梯度场中成立（下一章将具体介绍如何确定一个场是否是梯度场）。

根链全微分(可参考《多变量微积分4——全微分与链式法则》):

$$df = f_x dx + f_y dy$$

$$\int_C \nabla f\cdot d\vec{r} = \int_C (f_x dx + f_y dy) = \int_C df = f(P_1) - f(P_0)$$

这就和单变量微积分的基本定理一致。

定理的证明

将x和y参数化，C是在 t 时间内移动的轨迹：

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t_0 \le t \le t_1$$

$$P_0 = \big(x(t_0), y(t_0)\big), \qquad P_1 = \big(x(t_1), y(t_1)\big)$$

$$dx = x'(t)dt = \frac{dx}{dt}dt, \qquad dy = y'(t)dt = \frac{dy}{dt}dt$$

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_C (f_x dx + f_y dy) = \int_C \left(f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}\right)dt$$

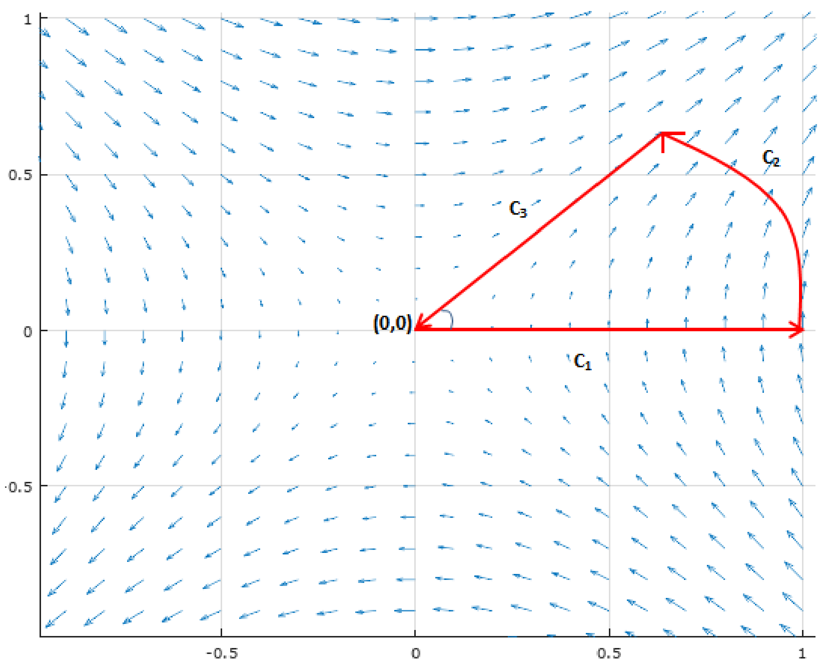
$$\text{根据链式法则:} \quad \frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

$$\int_C \left(f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}\right)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt}dt = f\big(x(t), y(t)\big)\Big|_{t_0}^{t_1} = f(P_1) - f(P_0)$$

定理的应用

在上一章《线积分》中有这样一个示例：

如下图所示，在向量场**F** = yi + xj中，质点移动的轨迹是$C_1 \to C_2 \to C_3$，三段轨迹围成了闭合的扇形，扇形的半径是1，弧度是 π/4，求力场中对质点的总功。



上一章花了比较大的力气计算总功，有了基本定理，就可以使计算简化。很容易看出，**F** = yi + xj是一个梯度场，它的势函数是f = xy，所以：

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(1,0) - f(0,0) = 0$$

$$W_2 = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\vec{r} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1,0) = \frac{1}{2}$$

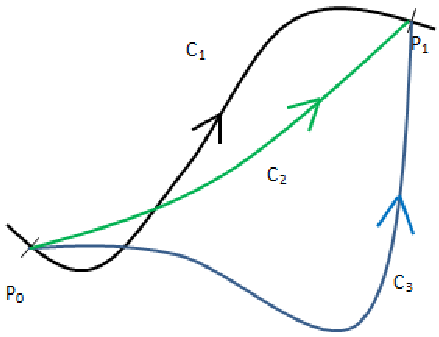
$$W_3 = \int_{C_3} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(0,0) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU

独立路径

线积分基本定理的一个重要结论是独立路径：在梯度场中，如果需要计算一个线积分，无论怎样的路径，积分值都只跟起点和终点的值有关。在梯度场中，下图三条路径的线积分是等价的。



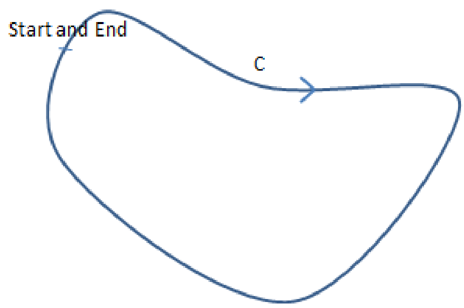
$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(P_1) - f(P_0)$$

对于闭合区间，可以用一个新的积分符号表示，以此强调闭合：

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

闭合的独立路径

在保守场中，如果C是闭合曲线，那么沿C所做的功是0；相反，如果不是保守场，那么一定存在某个地方，沿着闭合曲线所做的功不为0。反过来说，如果在一个向量场中，沿着某条闭合曲线做的功为0，这并不足以说明这个向量场是保守场，还必须强调是任意闭合曲线。

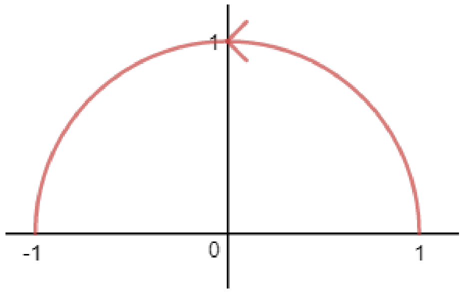


$$start\ point = end\ point$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(end) - f(start) = 0$$

综合示例

梯度场的势函数是f(x,y) = $x^5 + 3xy^3$，质点运动的轨迹C是半径为1的半圆，计算C在梯度场中的线积分。

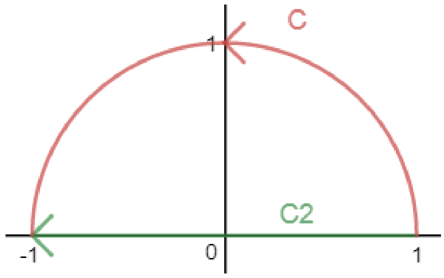


尝试使用3中方法。

1.根据线积分基本定理：

$$\int_C \nabla f \cdot \overrightarrow{\Delta r} = f(end) - f(start) = f(-1{,}0) - f(1{,}0) = -2$$

2.根据独立路径，下面两个曲线的线积分相等：



$$\nabla f = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle = \langle 5x^4 + 3y^3, 9xy^2 \rangle$$

在直线轨迹中，y = 0，dy = 0

$$\int_{C_2} \nabla f \cdot \overrightarrow{\Delta r} = \int_{C_2} \langle 5x^4 + 3y^3, 9xy^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle$$

$$= \int_1^{-1} \langle 5x^4, 0 \rangle \cdot \langle dx, 0 \rangle = -2$$

3.使x和y参数化：

$$x = cos\theta, dx = -sin\theta d\theta, \qquad y = sin\theta, dy = cos\theta d\theta$$

$$\int_C \nabla f \cdot \overrightarrow{\Delta r} = \int_C \langle 5x^4 + 3y^3, 9xy^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle = \cdots$$

作者：我是8位的

出处：http://www.cnblogs.com/bigmonkey

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

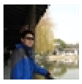
扫描二维码关注公众号“我是8位的”

随笔

分类: 多变量微积分

标签: 梯度场, 保守场, 线积分基本定理, 独立路径

好文要顶 关注我 收藏该文


我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
+加关注

0 推荐 0 反对

« 上一篇： 多变量微积分笔记13——线积分
» 下一篇： 概率笔记2——古典概型

posted on 2018-04-18 19:24 我是8位的 阅读(3714) 评论(0) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告
international-iq-test.com
智商测试: 开始测试
世界各地使用的官方IQ测试（平均IQ分数：100）。
打开

编辑推荐:
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
· ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
· .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
· 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

最新新闻:
· 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
· 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
· 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型

· Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
· 溺在理财暴雷潮的投资人： 本金63万，月兑25元不够卖菜
» 更多新闻...

Powered by:
博客园
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes